Universidad Simón Bolívar | **FS2211** 2do Parcial (30 %) Bloque **B**

Departamento de Física | Lunes, 25 de Febrero de 2013

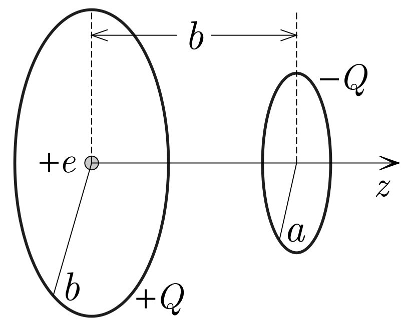
Nombre ______________________ Carnet ______________

1. [8 *pts.*] Se tienen dos aros cargados, como se muestra en la figura. Uno de radio b y carga $+Q$, localizado en el plano $z = 0$, con centro en el origen. El otro, de radio a y carga $-Q$, localizado en el plano $z = b$, con centro en el eje z. La relación entre los radios es $b = \sqrt{8}\, a$.

   (a) [3 *pts.*] Calcule el potencial electrostático $V(z)$, debido a los dos aros, para cualquier punto arbitrario $(0, 0, z)$ sobre el eje z.

   (b) [3 *pts.*] Calcule el campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$, debido a los dos aros, para cualquier punto arbitrario $(0, 0, z)$ sobre el eje z.

   (c) [2 *pts.*] Un protón (carga $+e$) se suelta, en reposo, desde el origen. Calcule la energía cinética del mismo cuando alcance el centro del otro aro.



Respuestas:

(a) Desde la posición arbitraria $(0, 0, z)$, la distancia a cualquier punto del aro $+Q$ es $R_+ = \sqrt{b^2 + z^2}$ (centro en el origen). La distancia a cualquier punto del aro $-Q$ será $R_- = \sqrt{a^2 + (z - b)^2}$ (centro en $z = b$). Siendo las distancias R_+ y R_- constantes en las respectivas expresiones, al integrar sólo se suma sobre la correspondiente distribución de cargas $\int dQ = Q$. Los potenciales estarán dados, entonces, por la expresión de Coulomb:

$$V_+ = \frac{\int dQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_+} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} \qquad \text{y} \qquad V_- = -\frac{\int dQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_-} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a^2 + (z - b)^2}}$$

quedando

$$\boxed{V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z - b)^2}}\right\}} \tag{1}$$

(b) Calculamos el campo como el gradiente del potencial ($E_z = -dV/dz$), y se obtiene, usando el potencial (1):

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{z}{(b^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{z - b}{[\,a^2 + (z - b)^2\,]^{3/2}}\right\}\widehat{\boldsymbol{z}}} \tag{2}$$

(c) Dado que el campo (2) es conservativo, basta con aplicar el principio de conservación de la energía mecánica para obtener $\Delta K = K(z = b) = -\Delta U = +e\,[\,V(z = 0) - V(z = b)\,]$:

$$K(z = b) = \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{2\,b^2}} + \frac{1}{a}\right\}$$

tomando $b = \sqrt{8}\, a$, queda:

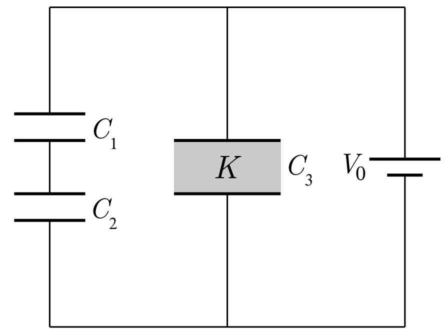
$$K(z = b) = \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{8}a} - \frac{1}{3a} - \frac{1}{4a} + \frac{1}{a}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K(z = b) = \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0\, a}\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{5}{12}\right\}} \tag{3}$$

2. [10 *pts.*] Los capacitores mostrados en la figura, de capacitancias respectivas $C_1 = C_2 = 4C$ y $C_3 = C$, se encuentran <u>inicialmente vacíos</u> (sin material dieléctrico en su interior). El circuito de capacitores está alimentado, como se muestra en la figura, por una fuente DC cuyo voltaje es V_0.

(a) [4 *pts.*] Estando los tres capacitores todavía vacíos, determine las cargas $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$, en los respectivos capacitores, y la energía electrostática total U_{tot} almacenada en el sistema.

(b) [4 *pts.*] A continuación, se introduce un dieléctrico de constante $K = 2$ en el capacitor C_3. Determine la nueva capacitancia C_3' del mismo. Calcule las nuevas cargas $\{Q_1', Q_2', Q_3'\}$, en los respectivos capacitores, suponiendo que el sistema sigue conectado a la fuente de voltaje V_0.

(c) [2 *pts.*] Calcule el trabajo realizado por el agente externo al introducir el dieléctrico en el capacitor C_3.



Respuestas:

(a) La diferencia de potencial entre las dos placas del capacitor C_3 es $V_3 = V_0$. Los otros dos capacitores C_1 y C_2 son idénticos y comparten la misma carga. Al estar en serie, y ser idénticos, la diferencia de potencial será la misma para ambos $V_1 = V_2 = V_0/2$. Multiplicando en cada caso por la capacitancia correspondiente, se obtiene

$$\boxed{Q_3 = CV_0, \quad \text{y} \quad Q_1 = Q_2 = (4C)(V_0/2) = 2CV_0} \tag{4}$$

La energía almacenada en cada capacitor estará dada por la expresión $U_i = \frac{1}{2}Q_iV_i$. Sumando las tres energías, obtenemos:

$$U_{tot} = \frac{1}{2}\left[\, 2 \times (2CV_0)(V_0/2) + (CV_0)V_0 \,\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{tot} = \frac{3}{2}CV_0^2} \tag{5}$$

(b) La nueva capacitancia será $C_3' = KC_3 = 2C$, y las capacitancias C_1 y C_2 quedan invariantes. Las diferencias de potencial entre placas quedan igual que en (a), dado que la batería permanece conectada. Las nuevas cargas $\{Q_1', Q_2', Q_3'\}$ serán entonces:

$$\boxed{Q_3' = C_3'V_0 = 2CV_0, \quad \text{y} \quad Q_1' = Q_2' = 2CV_0.} \tag{6}$$

(c) Dado que, tanto las cargas como las respectivas diferencias de potencial en los capacitores C_1 y C_2, permanecen invariantes, el trabajo del agente externo ($W_{ext} = \Delta U_{tot}$) será igual a la variación de la energía almacenada en el capacitor C_3:

$$W_{ext} = \Delta U_3 = \frac{1}{2}\left[Q_3'V_3' - Q_3V_3\right] = \frac{1}{2}\left[(2CV_0) - (CV_0)\right]V_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{ext} = \frac{1}{2}CV_0^2} \tag{7}$$

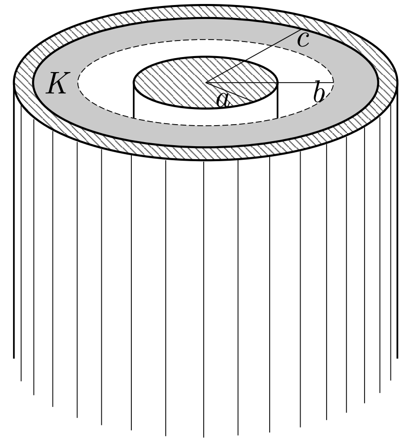
3. [12 *pts.*] Se tienen dos conductores cilíndricos coaxiales, uno macizo de radio $\boldsymbol{a}$ y el otro hueco, como se muestra en la figura, de radio interno $\boldsymbol{c}$. El espacio entre ellos está parcialmente relleno con un material dieléctrico, coaxial, de constante K, de radio interno $\boldsymbol{b}$ y radio externo $\boldsymbol{c}$. Se sabe que el potencial en los conductores tiene valores respectivos $V_a = V_0$ $(r = a)$ y $V_c = 0$ $(r = c)$.

(a) [3 *pts.*] Calcule el campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ en el espacio entre conductores. Suponga conocida la densidad lineal de carga λ_a, del conductor interno. Tenga cuidado en especificar claramente el campo en las regiones, vacía $(a < r < b)$, y con el dieléctrico $(b < r < c)$.

(b) [4 *pts.*] Calcule el potencial eléctrico $V(r)$, especificando las expresiones para las regiones, vacía $(a < r < b)$, y con el dieléctrico $(b < r < c)$.

(c) [3 *pts.*] A partir del potencial obtenido en (b), calcule la densidad lineal de carga λ_a, del conductor interno y la capacitancia del sistema. (Suponga que los cilindros tienen longitud H).

(d) [2 *pts.*] Calcule la densidad lineal de carga λ_{ind} inducida en la superficie interna $(r = b)$ del dieléctrico.



Respuestas:

(a) La Ley de Gauss con dieléctricos puede resumirse en $K\Phi_E = K\oint \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}} = Q^{ext}/\epsilon_0$, siendo K la constante dieléctrica y Q^{ext} la suma de cargas encerradas que no estén ligadas al dieléctrico. Basta entonces con determinar el campo de cargas libres $\vec{\boldsymbol{E}}^{ext}$, y dividir entre K en la región pertinente. En simetría cilíndrica, el campo es radial $\vec{\boldsymbol{E}}^{ext} = E_r^{ext}\,\widehat{\boldsymbol{r}}$ y el flujo a través de un cilindro de radio r y altura h queda:

$$\Phi_E = 2\pi\, r\, h\, E_r^{ext} = \frac{\lambda_a\, h}{\epsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E_r^{ext} = \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}, \tag{8}$$

con lo cual se obtiene el campo para las dos regiones indicadas:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0}\begin{cases} \dfrac{\widehat{\boldsymbol{r}}}{r} & \text{para} \quad a < r < b \\[2ex] \dfrac{\widehat{\boldsymbol{r}}}{Kr} & \text{para} \quad b < r < c \end{cases}} \tag{9}$$

(b) Tomando el voltaje definido en $r = c$, $V_c \equiv 0$, como referencia, calculamos el potencial electrostático $V(r)$ para la región con el dieléctrico K $(b < r < c)$:

$$V(r) = -\int_c^r \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -\frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0\, K}\int_c^r \frac{dr}{r} = \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0\, K}\,\ln\left(\frac{c}{r}\right) \quad\Rightarrow\quad \boxed{V(r = b) \equiv V_b = \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0\, K}\,\ln\left(\frac{c}{b}\right)} \tag{10}$$

Usamos la expresión resaltada en (10) como referencia en la segunda parte del cálculo, y obtenemos para la región vacía $(a < r < b)$:

$$V(r) = V_b - \int_b^r \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = V_b - \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0}\int_b^r \frac{dr}{r} = \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{K}\ln\left(\frac{c}{b}\right) + \ln\left(\frac{b}{r}\right)\right] \tag{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r = a) \equiv V_a = \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{K}\ln\left(\frac{c}{b}\right) + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]} \tag{12}$$

(c) La última expresión, resaltada en (12), nos permite obtener el valor de la densidad λ_a en función de los datos del problema. Multiplicando λ_a por la longitud H del cilindro interno, se obtiene, además la relación voltaje–carga, y con ella el valor de la capacitancia del sistema:

$$\boxed{\lambda_a = \frac{2\pi\epsilon_0}{\left[\,\frac{1}{K}\ln\left(\frac{c}{b}\right) + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\,\right]}\,V_0} \quad\Rightarrow\quad \boxed{C = \frac{2\pi\epsilon_0\, H}{\left[\,\frac{1}{K}\ln\left(\frac{c}{b}\right) + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\,\right]}} \tag{13}$$

(d) Basta con aplicar la Ley de Gauss en un entorno de la superficie $r = b$, para obtener

$$\begin{aligned} 2\pi\, b\, h\, [\, E_r(b^+) - E_r(b^-)\,] &= \frac{\lambda_{ind}}{\epsilon_0}\, h \\ &= 2\pi\, b\, h \left[\frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0\, K b} - \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0\, b} \right], \quad \text{de donde} \quad \boxed{\lambda_{ind} = \lambda_a \left(\frac{1}{K} - 1 \right)} \end{aligned} \qquad (14)$$